ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى الأولى باك علوم تجريبية

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس المتتاليات:

متتالية حسابية

- لكي نبين أن متتالية حسابية نحسب: $u_{n+1}-u_n$ العدد r الذي نجده هو الأساس و $u_n=u_0+nr$ هي الكتابة بدلالة n

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_1 فان : $u_n=u_1+(n-1)r$

وبصفة عامة : $u_n=u_p+(n-p)r$

- مجموع حدود متتابعة لمتتالية $(u_n)_{n\in I}$ حسابية:

$S_n=u_p+u_{p+1}+u_{p+2}+\cdots+u_n \quad n\succ p\geq n_0$

هو : $S_n=(n-p+1)\left(\frac{u_n+u_p}{2}\right)$

ملاحظة : $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=(n+1)\left(\frac{u_0+u_n}{2}\right)$

متتالية هندسية

- لكي نبين أن متتالية هندسية نحسب : $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ العدد q الذي نجده هو الأساس و $u_n=u_0\times q^n$ هي الكتابة بدلالة n
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_0 فان : $u_n=u_0q^{n-0}$
- إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q غير منعدم وحدها الأول u_1 فان : $u_n=u_1q^{n-1}$
- وبصفة عامة : $u_n=u_pq^{n-p}$
- مجموع حدود متتابعة لمتتالية $(u_n)_{n\in I}$ هندسية أساسها q

هو: $q\neq 1$: $S_n=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n=u_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$

تعريف: لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ مكبورة إذا وجد عدد حقيقي M بحيث $\forall n\in I \quad u_n\leq M$
- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ مصغورة إذا وجد عدد حقيقي m بحيث $\forall n\in I \quad u_n\geq m$
- نقول إن $(u_n)_{n\in I}$ محدودة إذا كانت مكبورة مصغورة .

مثال: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي: $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{n+1}{2n+1}$

1. بين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n\leq 1$
2. ماذا يمكن أن نقول عن المتتالية (u_n) ؟

الأجوبة : أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq 1$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $1-u_n=1-\frac{n+1}{2n+1}=\frac{(2n+1)-(n+1)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}\geq 0$

ومنه : $\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n\leq 1$ ❶

أ) نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n$ ؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_n-\frac{1}{2}=\frac{n+1}{2n+1}-\frac{1}{2}=\frac{2(n+1)-(2n+1)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}>0$

ومنه: $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n$ ❷

وبالتالي من ❶ و ❷ نجد: $\forall n\in\mathbb{N} \quad \frac{1}{2}<u_n\leq 1$

2) نقول المتتالية العددية (u_n) مكبورة إذا وجد عدد حقيقي 1

و نقول المتتالية العددية (u_n) مصغورة إذا وجد عدد حقيقي $\frac{1}{2}$

و نقول المتتالية العددية (u_n) محدودة

خاصية: لتكن $(u_n)_{n\in I}$ متتالية عددية

- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تزايدية إذا وفقط إذا كان: $\forall n\in I \quad u_{n+1}\geq u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ تناقصية إذا وفقط إذا كان: $\forall n\in I \quad u_{n+1}\leq u_n$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n\in I}$ ثابتة إذا وفقط إذا كان : $\forall n\in I \quad u_{n+1}=u_n$

مثال1 : أدرس رتابة المتتالية العددية $(u_n)_{n\in I}$ المعرفة كالتالي :

$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=2n+3$

الجواب : $u_{n+1}-u_n=2(n+1)+3-(2n+3)=2>0$ اذن: (u_n) تزايدية قطعا

مثال2: أدرس رتابة المتتالية العددية (v_n) المعرفة كالتالي : $\forall n\in\mathbb{N} \quad v_n=\frac{2}{n}$

الجواب : $v_{n+1}-v_n=\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n}=\frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)}=\frac{-2}{n(n+1)}<0$

اذن: (v_n) تناقصية قطعا

مثال3: نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كالتالي :

$$\forall n\in\mathbb{N}\begin{cases}u_{n+1}=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}\\ u_0=3\end{cases}$$

بين أن المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 2

الأجوبة : 1) يكفي ان نبين أن: $\forall n\in\mathbb{N} \quad 2\leq u_n$ ؟؟؟؟

نستعمل برهانا بالترجع

◎ نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

لدينا $u_0=3\geq 2$ اذن : العبارة صحيحة بالنسبة ل $n=0$

◎ نفترض أن: $u_n\geq 2$

◎ نبين أن: $u_{n+1}\geq 2$ ؟؟؟؟؟

نحسب الفرق : $u_{n+1}-2=\frac{8(u_n-1)}{u_n+2}-2=\frac{8(u_n-1)-2(u_n+2)}{u_n+2}=\frac{6u_n-12}{u_n+2}$

$u_{n+1}-2=\frac{6(u_n-2)}{u_n+2}$ و حسب افتراض الترجع لدينا : $u_n\geq 2$

اذن : $u_n-2\geq 0$ و $u_n+2>0$ و منه $u_{n+1}-2\geq 0$

وبالتالي: $\forall n\in\mathbb{N} \; u_n\geq 2$

الأستاذ : نجيب عثماني